

ESQUEMAS Y OPERADORES EN DIFERENCIAS

E. Bendito, A. Carmona, A. M. Encinas

Departament de Matemàtica Aplicada III.

Universitat Politècnica de Catalunya, Edifici C2

Jordi Girona Salgado, 1-3, 08034 Barcelona, España

e-mail: andres.marcos.encinas@upc.es

Resumen. En esta comunicación se presenta un cálculo vectorial discreto sobre retículas que permite definir sobre ellas operadores en diferencias análogos al gradiente, divergencia y laplaciano. La clave para llevar a cabo dicho cálculo radica en la introducción de un tensor métrico asociado a cada punto de la retícula. Mostramos que el laplaciano asociado a elecciones concretas del tensor métrico coincide con los esquemas en diferencias finitas asociados al operador de Laplace y en particular, ponemos el énfasis en la caracterización de los tensores métricos que producen esquemas en diferencias de tipo positivo y que por tanto, son adecuados desde el punto de vista de su resolución por métodos iterativos.

Palabras clave: Esquemas en diferencias, consistencia, cálculo vectorial discreto, operadores en diferencias.

1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es mostrar que es posible desarrollar un cálculo vectorial sobre retículas en el espacio n -dimensional. A partir de un tensor métrico previamente fijado, se definen sobre dichas retículas operadores en diferencias que son versiones discretas del gradiente y de la divergencia. La composición de la divergencia con el gradiente da lugar al operador de Laplace-Beltrami o Laplaciano sobre la retícula, asociado a la estructura métrica fijada.

Analizaremos el caso de retículas uniformes y mostraremos que para elecciones concretas del tensor métrico, el operador de Laplace

correspondiente coincide con los esquemas en diferencias sobre la retícula, comúnmente utilizados en la discretización del operador de Laplace $L(u) = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}$. Mostraremos especial atención en los esquemas de tipo positivo, que conducen a sistemas lineales cuya matriz de coeficientes es una matriz de Stieltjes diagonalmente dominante (d.d.), es decir una matriz simétrica, definida positiva, d.d. y con coeficientes negativos fuera de la diagonal, lo que la hace muy adecuada para resolver el sistema, fundamentalmente por métodos iterativos (ver^{2,5}).

Aunque aquí se trata una situación relativamente simple, presentaremos las definiciones de los operadores en diferencias en un contexto suficientemente general, de manera que nuestros planteamientos puedan generalizarse sin gran dificultad al caso de retículas irregulares y de operadores diferenciales generales de tipo elíptico, lo que permitirá extender el tratamiento efectuado en²⁻⁴ y en.⁷

Fijados $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_n \geq 3$, para cada $h > 0$ consideraremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^n

$$V_h = \left\{ h(i_1, \dots, i_n) : i_j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq i_j \leq m_j, \quad j = 1, \dots, n \right. \\ \left. \text{e } i_j = 0 \text{ ó } m_j \text{ para un índice a lo sumo} \right\},$$

$$R_h = \left\{ h(i_1, \dots, i_n) \in V_h : 1 \leq i_j \leq m_j - 1, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

y diremos que dos nodos $x, y \in V_h$ son *adyacentes* si su distancia euclídea, $|x - y|$, es igual a h y al menos uno de los dos pertenece a R_h . El conjunto de nodos adyacentes a $x \in V_h$ se representará por $V_h(x)$. Denominamos *retícula uniforme n -dimensional de tamaño h* y la representamos por Γ_h , al conjunto V_h junto con la relación de adyacencia anterior. Los elementos de V_h y los de R_h serán denominados *nodos de la retícula* y *nodos interiores de la retícula*, respectivamente y el que dos nodos sean adyacentes será representado geoméricamente por medio del segmento que los une. El conjunto $\delta(R_h) = V_h \setminus R_h$ será denominado *frontera de la retícula* y sus elementos *nodos frontera*, mientras que los elementos del conjunto

$$\overset{\circ}{R}_h = \left\{ h(i_1, \dots, i_n) \in V_h : 2 \leq i_j \leq m_j - 2, \quad j = 1, \dots, n \right\},$$

serán denominados *nodos totalmente interiores* de la retícula, (ver⁶). Es claro que todo nodo frontera tiene un único nodo adyacente, que

por supuesto es un nodo interior. Una representación gráfica de una retícula uniforme bidimensional, donde aparecen señalados los conjuntos $R_h, \delta(R_h)$ y $\overset{\circ}{R}_h$ está dada en la Figura 1.

Si denotamos por e_j al j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ denominaremos *plantilla centrada en x* a $P_h(x) = P'_h(x) \cup \{x\}$, donde $P'_h(x)$ es el conjunto formado por los siguientes puntos de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 x_j &= x + he_j, & x_{n+j} &= x - he_j, & j &= 1, \dots, n; \\
 z_j &= x + 2he_j, & z_{n+j} &= x - 2he_j, & j &= 1, \dots, n; \\
 y_{ij} &= x + h(e_i + e_j), & y_{ji} &= x - h(e_i + e_j), & 1 \leq i < j \leq n, \\
 w_{ij} &= x - h(e_i - e_j), & w_{ji} &= x + h(e_i - e_j), & 1 \leq i < j \leq n.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Es claro que si $x \in R_h$, entonces $V_h(x) = \{x_j\}_{j=1}^{2n}$, mientras que si $x = h(i_1, \dots, i_n) \in \delta(R_h)$, entonces $V_h(x) = \{x_j\}$ cuando $i_j = 0$ y $V_h(x) = \{x_{n+j}\}$ cuando $i_j = m_j$. Por otra parte, si $x \in \overset{\circ}{R}_h$ entonces $|P'_h(x)| = 2n(n + 1)$ y $P_h(x) \subset V_h$. En la Figura 2 se describe la plantilla bidimensional $P_h(x)$ centrada en $x \in \overset{\circ}{R}_h$.

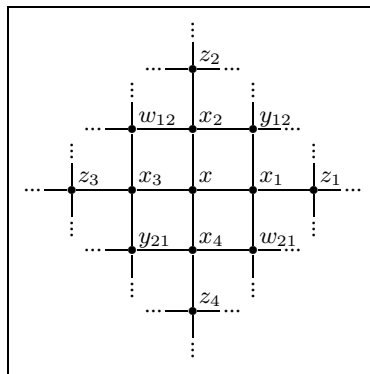
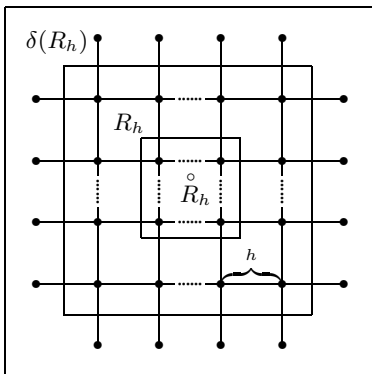


Figura 1: Retícula bidimensional Figura 2: Plantilla bidimensional

Un *esquema en diferencias sobre Γ_h* que sea *consistente* con el operador diferencial L sobre $\overset{\circ}{R}_h$, es una expresión del tipo

$$L_h(u)(x) = -\alpha_{xx}u(x) + \sum_{y \in P'_h(x)} \alpha_{xy}u(y), \quad x \in \overset{\circ}{R}_h, \quad \alpha_{xy} \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde u es una función arbitraria definida en un abierto que contiene a V_h , de manera que si u es suficientemente regular, entonces

$L(u)(x) - L_h(u)(x) = \mathcal{O}(h^m)$, $x \in \overset{\circ}{R}_h$; ver por ejemplo,¹ y.⁵ El número natural m se denomina *orden de consistencia del esquema*. Es habitual exigir además que $\alpha_{xy} \neq 0$ para cada $y \in V_h(x)$, es decir que el esquema cuente con los valores de las funciones en los nodos adyacentes a cada $x \in \overset{\circ}{R}_h$, condición que supondremos en lo sucesivo. Es claro que la consistencia de orden m implica la consistencia de orden k para todo $k \leq m$. Por otra parte, el esquema L_h se denomina *de tipo positivo sobre $\overset{\circ}{R}_h$* si para cada $x \in \overset{\circ}{R}_h$, $\alpha_{xy} \geq 0$ para cada $y \in P'_h(x)$ y además $\sum_{y \in P'_h(x)} \alpha_{xy} \leq \alpha_{xx}$, lo que en particular exige que $\alpha_{xy} > 0$ si $y \in V_h(x)$ y que $\alpha_{xx} > 0$.

Aunque pueden tratarse situaciones mucho más generales, para nuestros propósitos es suficiente considerar esquemas de coeficientes constantes sobre $\overset{\circ}{R}_h$ que asignen el mismo coeficiente a los puntos de la plantilla a igual distancia del centro de la misma, es decir esquemas de la forma

$$\begin{aligned} L_h(u)(x) = & -q u(x) + \alpha \sum_{j=1}^{2n} u(x_j) + \beta \sum_{j=1}^{2n} u(z_j) \\ & + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n u(y_{ij}) + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n u(w_{ij}), \end{aligned} \quad (3)$$

donde $q, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y x es cualquier nodo de $\overset{\circ}{R}_h$. En este caso, el esquema es de tipo positivo si y sólo si se satisface que $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \geq 0$ y $q \geq 2n(\alpha + \beta + (n-1)\gamma)$.

Si u es una función suficientemente regular en un abierto que contiene a $\overset{\circ}{R}_h$, la hipótesis de consistencia conduce a un sistema de ecuaciones que deben verificar los coeficientes q, α, β, γ . El máximo orden de consistencia de un esquema del tipo (3) es $m = 4$ y en este caso sus coeficientes están unívocamente determinados por las identidades

$$q = \frac{5n}{2h^2}, \quad \alpha = \frac{4}{3h^2}, \quad \beta = \frac{-1}{12h^2}, \quad \gamma = 0, \quad (4)$$

lo que implica que para cada $x \in \overset{\circ}{R}_h$, tal esquema se expresa en la forma

$$L_h(u)(x) = \frac{4}{3h^2} \sum_{j=1}^{2n} (u(x_j) - u(x)) - \frac{1}{12h^2} \sum_{j=1}^{2n} (u(z_j) - u(x)) \quad (5)$$

y no es de tipo positivo. La búsqueda de esquemas de tipo positivo con el mayor orden de consistencia posible, conduce a considerar esquemas consistentes de segundo orden, cuyos coeficientes están determinados por las identidades

$$q = 2n\left(\frac{1}{h^2} - 3\beta - (n-1)\gamma\right), \quad \alpha = \frac{1}{h^2} - 4\beta - 2(n-1)\gamma, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

lo que implica que para cada $x \in \overset{\circ}{R}_h$, el esquema L_h se expresa como

$$\begin{aligned} L_h(u)(x) = & \alpha \sum_{j=1}^{2n} \left(u(x_j) - u(x) \right) + \beta \sum_{j=1}^{2n} \left(u(z_j) - u(x) \right) \\ & + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(y_{ij}) - u(x) \right) + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(w_{ij}) - u(x) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Además, para que el esquema L_h sea de tipo positivo es necesario y suficiente que los parámetros β y γ satisfagan las desigualdades

$$\beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad 0 \leq 4\beta + 2(n-1)\gamma < \frac{1}{h^2}. \quad (8)$$

En particular, la elección $\beta = \gamma = 0$ conduce al esquema estándar de $2n + 1$ nodos, mientras que la elección $\beta = 0$ y $\gamma = \frac{1}{6(n-1)h^2}$ conduce al esquema estándar de $2n^2 + 1$ nodos (9 y 19 nodos en los casos bi y tridimensional, respectivamente).

2 OPERADORES EN DIFERENCIAS

Interpretaremos ahora la retícula uniforme Γ_h como una variedad discreta, sobre la cual vamos a desarrollar un cálculo vectorial análogo al del caso continuo. El concepto clave será el de espacio tangente a cada nodo de la retícula.

Para cada $x \in V_h$ y para cada $y \in V_h(x)$, denotaremos por s_{xy} al segmento que une x e y y definiremos el *espacio tangente a x* como el espacio vectorial $T_x(\Gamma_h)$ formado por las combinaciones lineales formales de los segmentos incidentes con x . Por tanto, el sistema $\{s_{xy}\}_{y \in V_h(x)}$ es base de $T_x(\Gamma_h)$ y los elementos de $T_x(\Gamma_h)$ son de la forma $\mathbf{v} = \sum_{y \in V_h(x)} v_y s_{xy}$, donde $v_y \in \mathbb{R}$ para cada $y \in V_h(x)$. Por

tanto, $\dim T_x(\Gamma) = 2n$ si $x \in R_h$, mientras que $\dim T_x(\Gamma) = 1$ cuando $x \in \delta(R_h)$.

Una vez definido el espacio tangente a cada nodo, podemos desarrollar todas las nociones relativas al cálculo vectorial siguiendo las pautas del caso continuo. De hecho, la situación es análoga al caso de una variedad diferencial aunque, por supuesto, las condiciones de diferenciabilidad carecen de sentido aquí. Para comenzar, denotamos por $\mathcal{C}(V_h)$ al conjunto de funciones reales definidas en V_h .

Un *campo vectorial* es una aplicación que a cada nodo le asigna un vector de su espacio tangente. Así, si \mathbf{f} es un campo vectorial, entonces para cada $x \in V_h$, $\mathbf{f}(x) = \sum_{y \in V_h(x)} f(x, y) s_{xy}$. Por tanto, un campo vectorial puede representarse por medio de su *función componente*, $f: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface que para cada $x \in V_h$, $f(x, y) = 0$ si $y \notin V_h(x)$. Denotaremos por $\mathcal{X}(\Gamma_h)$ al conjunto de los campos vectoriales.

Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma_h)$ y f, g son sus componentes respectivas, la notación $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ representará la función perteneciente a $\mathcal{C}(V_h)$ dada por la expresión $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle(x) = \sum_{y \in V_h(x)} f(x, y)g(x, y)$, $x \in V_h$.

Un *tensor métrico sobre Γ_h* no será más que un campo de matrices simétricas y definidas positivas, que por tanto inducen un producto escalar sobre el espacio tangente a cada nodo. En otras palabras un tensor métrico sobre Γ_h asigna a cada nodo $x \in V_h$ una matriz cuadrada simétrica y definida positiva $\mathbf{G}(x)$, cuyo orden es $\dim T_x(\Gamma_h)$. Por supuesto, si \mathbf{G} es un tensor métrico entonces, el tensor que asocia a cada nodo x la matriz inversa de $\mathbf{G}(x)$, es también un tensor métrico, que denominaremos *tensor de admitancias asociado al tensor métrico* y que denotaremos por \mathbf{A} . Para cada $x \in V_h$ y cada $y, z \in V_h(x)$, $g_x(y, z)$ y $a_x(y, z)$ son las componentes de las matrices $\mathbf{G}(x)$ y $\mathbf{A}(x)$ respectivamente, que corresponden a la fila y -ésima y a la columna z -ésima. Además, para cada $x \in V_h$, g_x y a_x pueden entenderse como funciones definidas en $V_h \times V_h$ considerando $g_x(y, z) = a_x(y, z) = 0$ cuando $(y, z) \notin V_h(x) \times V_h(x)$.

Los tensores métricos que consideraremos aquí deben ser coherentes con la estructura uniforme tanto de la retícula como del operador de L . Describiremos a continuación las propiedades fundamentales de una clase de matrices que dan lugar a tensores métricos con las características de uniformidad requeridas.

Lema. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ con $n \geq 2$ y cada $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$, consideremos la matriz de orden $2n$ definida por la expresión

$$G = G(n; g_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} g_1 I + g_3 K & g_2 I + g_3 K \\ g_2 I + g_3 K & g_1 I + g_3 K \end{bmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de orden n y K es la matriz de orden n cuyos coeficientes son todos iguales a 1, excepto los de la diagonal que son nulos. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) G es definida positiva sii $g_1 > \max\{g_2, 2g_3 - g_2, -g_2 - 2(n-1)g_3\}$.
- ii) G es de Stieltjes d.d. sii $g_2, g_3 \leq 0$ y además $g_1 > -g_2 - 2(n-1)g_3$.
- iii) Si $\det G \neq 0$, existen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $G^{-1} = G(n; a_1, a_2, a_3)$.

La definición de la familia de matrices $G(n; g_1, g_2, g_3)$ puede extenderse al caso $n = 1$, tomando $G(1; g_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_1 \end{bmatrix}$. Si adoptamos el convenio de que cuando $n = 1$ entonces $g_3 = 0$, todas las propiedades descritas en el lema anterior siguen vigentes en el caso unidimensional.

A continuación utilizaremos el tipo de matrices que acabamos de describir para definir un tensor métrico sobre Γ_h , que en lo sucesivo denominaremos *tensor métrico uniforme de parámetros* g_1, g_2, g_3 . Observemos primero que cuando $x \in \delta(R_h)$, como $\dim T_x(\Gamma_h) = 1$, es suficiente considerar $G(x) = hg_0$, donde $g_0 > 0$. Por otra parte para cada $x \in R_h$ haremos la asignación $G(x) = hG(n; g_1, g_2, g_3)$, donde $g_1 > \max\{g_2, 2g_3 - g_2, -g_2 - 2(n-1)g_3\}$ y donde el valor de las componentes de la matriz $G(x)$ están dadas por $g_x(x_j, x_j) = g_1$, para cada $j = 1, \dots, 2n$, $g_x(x_j, x_i) = g_2$ si $|i - j| = n$ y $g_x(x_j, x_i) = g_3$ en otro caso.

Después del lema anterior, resulta que el tensor de admitancias asociado a G es también un tensor métrico uniforme. Tenemos pues que si $x \in \delta(R_h)$, $A(x) = \frac{a_0}{h}$ con $a_0 = \frac{1}{g_0}$ mientras que si $x \in R_h$, $A(x) = \frac{1}{h}G(n; a_1, a_2, a_3)$ donde $G(n; a_1, a_2, a_3) = G^{-1}(n; g_1, g_2, g_3)$.

La consideración de un tensor métrico, G , sobre Γ_h determina el siguiente producto interno sobre el espacio de campos vectoriales

$$(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V_h} \langle G(x)f(x), g(x) \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_{V_h} \langle Gf, g \rangle(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{X}(\Gamma_h) \quad (9)$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ está motivado por el hecho de que cada segmento que une nodos adyacentes aparece considerado en dos ocasiones. Este producto interno, junto con el estándar sobre $\mathcal{C}(V_h)$

$$u \cdot v = h \sum_{x \in V_h} u(x)v(x) \equiv \int_{V_h} u(x)v(x) h dx, \quad u, v \in \mathcal{C}(V_h) \quad (10)$$

constituirán los ingredientes fundamentales de la construcción del cálculo operacional. Para desarrollarlo tomaremos como operador básico el *operador derivada* que a cada $u \in \mathcal{C}(V_h)$ le asigna el campo vectorial du determinado por la expresión

$$du(x) = \sum_{y \in V_h(x)} \left(u(y) - u(x) \right) s_{xy}, \quad x \in V_h \quad (11)$$

El *operador gradiente* se define a partir del operador derivada como el que cada $u \in \mathcal{C}(V_h)$ le asigna el campo vectorial $\nabla u = \mathbf{A}du$, es decir

$$\nabla u(x) = \frac{1}{h} \sum_{y \in V_h(x)} \left[\sum_{z \in V_h(x)} a_x(y, z) \left(u(z) - u(x) \right) \right] s_{xy}, \quad x \in V_h \quad (12)$$

El *operador divergencia* se define formalmente como $\text{div} = -\nabla^*$, es decir como el opuesto del operador adjunto del gradiente, respecto de los productos internos (9) y (10). Por tanto, si $\mathbf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma_h)$, $\text{div} \mathbf{f}$ es la función de $\mathcal{C}(V_h)$ determinada por la relación

$$\int_{V_h} u(x) \text{div} \mathbf{f}(x) h dx = -\frac{1}{2} \int_{V_h} \langle \mathbf{G} \mathbf{f}, \nabla u \rangle(x) dx, \quad \forall u \in \mathcal{C}(V_h) \quad (13)$$

de donde, si f es la función componente de \mathbf{f} , resulta que

$$\text{div} \mathbf{f}(x) = \frac{1}{2h} \sum_{y \in V_h(x)} \left(f(x, y) - f(y, x) \right), \quad x \in V_h. \quad (14)$$

Por analogía con el caso continuo, definimos *operador de Laplace-Beltrami* o *Laplaciano* de Γ_h como la composición de la divergencia con el gradiente, es decir $\Delta u = \text{div} \nabla u$ para cada $u \in \mathcal{C}(V)$. Después de una manipulación algebraica, obtenemos que

$$\Delta u(x) = \frac{1}{h} \sum_{y \in V_h} \ell(x, y) \left(u(y) - u(x) \right) \quad \text{para cada } x \in V_h \quad (15)$$

donde para cada $x, y \in V_h$ se satisface que

$$\ell(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{z \in V_h} \left(a_x(y, z) + a_y(x, z) - a_z(x, y) \right) \quad (16)$$

Si suponemos que \mathbf{G} es un tensor métrico uniforme y a_1, a_2, a_3 son los parámetros de su tensor de admitancias asociado, \mathbf{A} , entonces si $a_0 = a_1 + a_2 + 2(n-1)a_3$, resulta que para cada $u \in \mathcal{C}(V_h)$ y cada $x \in \overset{\circ}{R}_h$ se satisface que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \frac{a_0}{h^2} \sum_{j=1}^{2n} \left(u(x_j) - u(x) \right) - \frac{a_2}{2h^2} \sum_{j=1}^{2n} \left(u(z_j) - u(x) \right) \\ &\quad - \frac{a_3}{h^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(y_{ij}) - u(x) \right) - \frac{a_3}{h^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(w_{ij}) - u(x) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Comparando esta expresión con (7), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema. Sean $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha = \frac{1}{h^2} - 4\beta - 2(n-1)\gamma \neq 0$ y el esquema consistente de segundo orden sobre $\overset{\circ}{R}_h$ dado por

$$\begin{aligned} L_h(u)(x) &= \alpha \sum_{j=1}^{2n} \left(u(x_j) - u(x) \right) + \beta \sum_{j=1}^{2n} \left(u(z_j) - u(x) \right) \\ &\quad + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(y_{ij}) - u(x) \right) + \gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(u(w_{ij}) - u(x) \right), \quad x \in \overset{\circ}{R}_h. \end{aligned}$$

Entonces, la condición necesaria y suficiente para que sobre Γ_h exista un tensor métrico uniforme \mathbf{G} tal que $L_h \equiv \Delta$ sobre $\overset{\circ}{R}_h$ es que se satisfagan las desigualdades

$$2\beta - \gamma < \frac{1}{2h^2} \quad \text{y} \quad 2\beta + (n-1)\gamma < \frac{1}{2h^2}. \quad (18)$$

Además, cuando esto ocurre el tensor métrico uniforme está unívocamente determinado y su tensor de admitancias está dado por la asignación

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{h} G(n; 1 - 2h^2\beta, -2h^2\beta, -h^2\gamma), \quad x \in R_h \quad (19)$$

Obsérvese que las condiciones (18) se reducen a $2\beta + (n-1)\gamma < \frac{1}{2h^2}$ si $\gamma \geq 0$ o a $2\beta - \gamma < \frac{1}{2h^2}$ si $\gamma < 0$ y en cualquier caso implican que $\alpha > 0$. En particular, si el esquema es de tipo positivo, las condiciones (18) quedan satisfechas, de manera que *todo esquema de tipo positivo coincide sobre $\overset{\circ}{R}_h$ con el Laplaciano respecto a un tensor métrico uniforme*. Además, en este caso, (19) nos asegura que $A(x)$ es una matriz de Stieltjes d.d. para cada $x \in R_h$. En particular, las elecciones $A(x) = \frac{1}{h}G(n; 1, 0, 0) = \frac{1}{h}Id$ y $A(x) = \frac{1}{h}G(n; 1, 0, \frac{-1}{6(n-1)})$ para cada $x \in R_h$ conducen a los esquemas habituales de $2n+1$ y $2n^2+1$ nodos respectivamente. Por otra parte, el único esquema consistente de cuarto orden sobre $\overset{\circ}{R}_h$, (5), también satisface las condiciones (18) y de hecho se corresponde con la elección $A(x) = \frac{1}{6h}G(n; 7, 1, 0)$ para cada $x \in R_h$.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto BFM2000-1063.

REFERENCIAS

- [1] G.E. Forsythe & W.R. Wasow, "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, 1960.
- [2] B. Heinrich, "Finite Difference Methods on Irregular Networks", Birkhäuser Verlag, 1987.
- [3] J.M. Hyman & M. Shashkov, The orthogonal decomposition theorems for mimetic finite difference methods, *SIAM J. Numer. Anal.* **36** (1999), 788-818.
- [4] L.G. Margolin, M. Shashkov & P.K. Smolarkiewicz, A discrete operator calculus for finite difference approximations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **187** (2000), 365-383.
- [5] A.R. Mitchell & D.F. Griffiths, "The Finite Difference Method in Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, 1994.
- [6] A.A. Samarski & V.B. Andréev, "Métodos en diferencias para las ecuaciones elípticas", Mir, 1979.
- [7] W. Schwalm, B. Moritz, M. Giota & M. Schwalm, Vector difference calculus for physical lattice models, *Phy. Rev. E* **59** (1999), 1217-1233.